UTN HAEDO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL HAEDO

Nombre y Apellido:..
Correo:...Fecha:06/07/2023

Ejercicios	1	2a	2b	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6	NOTA
Puntaje	1	0.5	0.5	1.5	0.5	2	1	1	0.5	1.5	

2do Parcial de Análisis Matemático II (Curso cuatrimestral)

Ejercicio 1) Calcular el volumen del cuerpo delimitado por las siguientes superficies $z + 2 \geq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$ y $4 - z \geq x^2 + y^2$

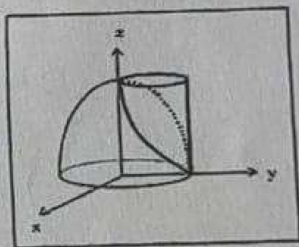
Ejercicio 2a) Analiza si el campo vectorial $\overrightarrow{V(x,y,z)} = \underbrace{(yz^2e^{xy})}_{V1}\,\breve{\imath} + \underbrace{(xz^2e^{xy})}_{V2}\,\breve{\jmath} + \underbrace{2\,ze^{xy}}_{V3}\,\breve{k}$ es un campo gradiente. En caso *afirmativo, hallar la función potencial tal* $\overrightarrow{V(x,y,z)} = \overline{\nabla} F(x,y,z)$ *verificando la respuesta .*

Ejercicio 2b) Explica que es campo vectorial gradiente

Ejercicio 3a) Bajo la acción de un campo de fuerzas $\overrightarrow{V(x,y)} = (4y^3 + ArcCos(5x), x^2 + 12\,xy^2)$.Una partícula da una *vuelta completa a una circunferencia de radio 4 en el sentido antihorario en el plano xy* centrada en el origen. Hallar la circulación del *campo a lo largo de la curva. ¿Es posible aplicar el teorema de Green?. Enúncielo. ¿Es irrotacional el campo? Justifica todas las respuestas.*

Ejercicio 3b) Enuncia las propiedades que cumple un campo conservativo indicando la condición necesaria y suficiente para que lo sea tanto para $\mathbb{R}^2$ *como para* $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 4a) La superficie de una montaña que responde a la siguiente ecuación $x^2 + y^2 + z = 25$. *Sobre una de las laderas se construye un restaurante cilíndrico de ecuación* $x^2 - 5y + y^2 = 0$ según el gráfico.



La temperatura que irradia la superficie de la montaña viene dada por el siguiente campo escalar

$T(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 3z$. El campo vectorial que responde a la ley de Fourier, se define como $\overrightarrow{V(x,y,z)} = -k\overline{\nabla}T(x,y,z)$ (Siendo k una constante). Calcular el flujo del campo a través de todo el volumen que forma el restaurante cilíndrico. **Resuelve la integral realizando cada paso hasta obtener el resultado en las coordenadas convenientes.**

Ejercicio 4b) Plantea, utilizando integrales, como calcular el área lateral de dicho restaurante (solo planteo en las coordenadas convenientes).Grafica el dominio considerado.

Ejercicio 5a) Calcular el flujo de la superficie $y = 4$, en el primer octante con normal exterior limitada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$ sabiendo que el campo v es conservativo con función potencial $U(x,y,z) = x\,y + 4\,C$. ¿Es posible aplicar el teorema de la divergencia? Justifica la respuesta.

Ejercicio 5b) Enuncia el teorema de la divergencia.

Ejercicio 6) Calcular la masa del cuerpo definido por $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 32$, en el primer octante, si su densidad es proporcional a la distancia del punto del cuerpo al plano xy

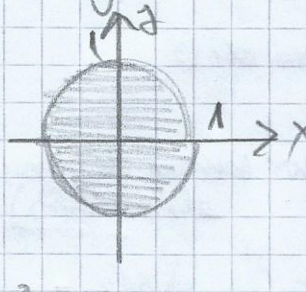
Nota:. Los bosquejos de los gráficos deben estar en la hoja más allá que pueden usar graficadores. Las integrales se deben plantear en las coordenadas convenientes y resolverse con aplicaciones en caso que el enunciado diga lo contrario.

(resuelto por Sylvina)

AM2 FRH	2° parcial	HOJA N° 1/3 — FECHA 6-7-23

EJ 1 Calcular el vol. del cuerpo limitado por las sup.: $\begin{cases} z+2 \geq x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \leq 1 \\ 4-z \geq x^2+y^2 \end{cases}$

$x^2+y^2 \leq 1$ es la proyección



$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \\ z = z \end{cases}$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq 1$

$r^2-2 \leq z \leq 4-r^2$

$x^2+y^2-2 \leq z \leq 4-x^2-y^2$

$$\mathrm{Vol}_W = \iiint_W d\,\mathrm{vol} \overset{\mathrm{C.V.}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2-2}^{4-r^2} \underset{\text{jac}}{r}\, dz\,dr\,dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} dt}_{2\pi} \underbrace{\int_0^1 r\,(4-r^2-r^2+2)\,dr}_{7/3}$$

$$\boxed{\mathrm{Vol}_W = \frac{14}{3}\pi}$$

EJ 2 a) Analizar si $\vec{V}(x,y,z) = \underbrace{yz^2e^{xy}}_{V_1}\,\breve{i} + \underbrace{xz^2e^{xy}}_{V_2}\,\breve{j} + \underbrace{2ze^{xy}}_{V_3}\,\breve{k}$ es campo de gradientes.

En caso afirmativo, hallar la función potencial / $\vec{V} = \vec{\nabla}F$

$\mathrm{dom}(\vec{V}) = \mathbb{R}^3$ (abierto simplemente conexo) ✓

$\vec{V} \in C^1$ pues V_1, V_2 y V_3 son funciones elementales ✓

¿Matriz jacobiana simétrica?:

$\begin{cases} V_2{}'_z = 2xze^{xy} \\ V_3{}'_y = 2xze^{xy} \end{cases} \Big\rangle = ✓$ $\begin{cases} V_1{}'_z = 2zye^{xy} \\ V_3{}'_x = 2zye^{xy} \end{cases} \Big\rangle = ✓$ $\begin{cases} V_2{}'_x = z^2e^{xy} + xz^2e^{xy}y \\ V_1{}'_y = z^2e^{xy} + yz^2e^{xy}x \end{cases} \Big\rangle =$

Matriz jac. simétrica ✓ $\boxed{\vec{V}\text{ ES campo de gradientes}}$

Hallo F (función potencial)

$\begin{cases} F'_x = yz^2e^{xy} \xrightarrow{\text{integro en } x} F(x,y,z) = z^2e^{xy} + \alpha(y,z) \\ F'_y = xz^2e^{xy} \xrightarrow{\text{int en } y} F(x,y,z) = z^2e^{xy} + \beta(x,z) \\ F'_z = 2ze^{xy} \xrightarrow{\text{int en } z} F(x,y,z) = z^2e^{xy} + \gamma(x,y) \end{cases}$ $\boxed{F(x,y,z) = z^2e^{xy} + C}$

b) Explicar qué es un campo de gradientes

Un campo de gradientes es un campo vectorial formado por los vectores gradientes de una función escalar (la función potencial)

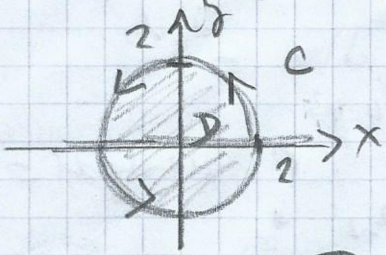
NOTA

(resuelto por Sylvina)

Ej 3 a) Bajo la acción de un campo $\vec{V}(x,y) = (\underbrace{4y^3 + \text{Arc}\cos(5x)}_{P}, \underbrace{x^2 + 12xy^2}_{Q})$

Una partícula da una vuelta completa a una circunferencia de radio 4 en el sentido antihorario en el plano xy.

Hallar la circ. del campo a lo largo de la curva. ¿Es posible aplicar el teorema de Green? ¿El campo es irrotacional?



C es una curva suave, frontera de D

D región compacta de $\mathbb{R}^2$

$\vec{V} = (P, Q) \in C^1$ (sus componentes son sumas de funciones elementales)

$$\Rightarrow \text{T. Green}: \quad \oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{e} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx dy =$$

$$= \iint_D 2x + \cancel{12y^2} - \cancel{12y^2}\, dx dy = 0$$ (por la simetría de D, integrando x)

El campo NO es irrotacional pues $Q'x \neq P'_y$

$2x + 12xy \neq 12xy$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{F}\, d\bar{e} = 0}$$

b) Enunciar las propiedades que cumple un campo conservativo indicando condición necesaria y suficiente para que lo sea tanto en $\mathbb{R}^2$ como en $\mathbb{R}^3$

condición necesaria: $\text{rot}(\bar{F}) = \bar{0}$

Cond. necesaria y suficiente: $\text{rot}(\bar{F}) = \bar{0}$ y $\text{dom}(\bar{F}) = \mathbb{R}^2$
$= \mathbb{R}^3$

Si $\bar{F}$ es campo conservativo: 1) $\exists\, \varphi$ (función potencial) tal que $\bar{F} = \bar{\nabla}\varphi$

2) la circ. a lo largo de toda curva cerrada es cero $\oint_C \bar{F}\, d\bar{e} = 0$

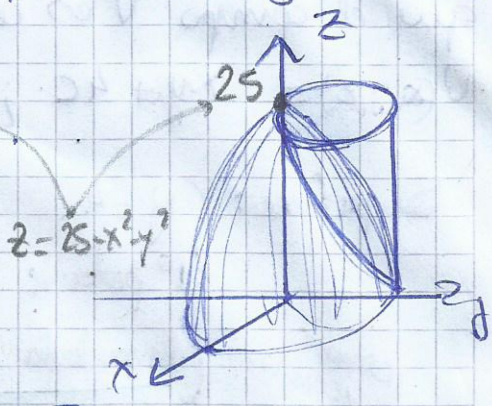
3) independencia del camino

NOTA

(resuelto por Sylvina)

AM2 FRH	2° parcial	HOJA N° 2/3 — FECHA 6-7-23

EJ 4 a) La sup. de una montaña que responde a la sig. ecuación $x^2+y^2+z=25$. Sobre una de las laderas se construye un restaurante cilíndrico de ecuac. $x^2-5y+y^2=0$ (ver gráfico)



La temperatura que irradia la sup. de la montaña viene dado por $T_{(x,y,z)}=3x^2+3y^2+3z$

El campo vectorial que responde a la ley de Fourier, se define como $\vec{V}(x,y,z)=k\,\nabla T(x,y,z)$. Calcular el flujo a través de todo el volumen que forma el cilindro

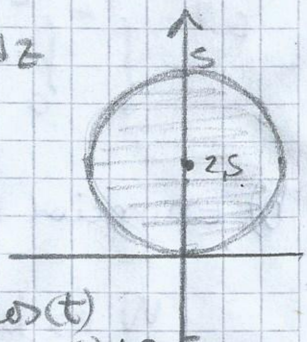
$\vec{V}(x,y,z)=k\,(6x,6y,3)\quad \in C^1$ ✓

$x^2-5y+y^2=0$
$\Rightarrow 4x^2-20y+4y^2=0$
$\boxed{4x^2+4y^2=20y}$

W región de $\mathbb{R}^3$  ✓

S sup frontera de W, suave a trozos, orientada al exterior ✓

$\Rightarrow$ T. Gauss $\rightarrow \oiint_S \vec{V}\,d\vec{s}=\iiint_W \operatorname{div}(\vec{V})\,dx\,dy\,dz$



$\operatorname{div}(\vec{V})=P'_x+Q'_y+R'_z=6k+6k=\boxed{12k=\operatorname{div}(\vec{V})}$

$x^2-5y+y^2=0 \longrightarrow x^2+(y-2{,}5)^2=2{,}5^2$

$\oiint_S \vec{F}\,d\vec{s}=\iiint_W 12k\,dx\,dy\,dz=$

C.V. $=12k\int_0^{2\pi}\int_0^{2{,}5}\int_{25-r^2}^{25} r\,dz\,dr\,dt=$ (Jac.)

$0\le t\le 2\pi$
$0\le r\le 2{,}5$
$25-r^2\le z\le 25$

$\begin{cases} x=r\cos(t)\\ y=r\,\operatorname{sen}(t)+2{,}5\\ z=z\end{cases}$

$=12k\cdot 2\pi\int_0^{2{,}5} r(\cancel{25}-\cancel{25}+r^2)\,dr=24k\pi\,\frac{625}{64}\rightarrow \boxed{\oiint_S \vec{V}\,d\vec{s}=\frac{1875}{6}k\pi}$

b) Plantear, utilizando integrales, cómo calcular el área lateral del restaurante. (Solo planteo)

$\begin{cases} x^2+y^2+z=25\\ x^2+y^2-5y=0\end{cases}$ $\boxed{z=25-5y}$

$N=\left(\frac{2x}{2x},\frac{2y-5}{2x},\frac{0}{2x}\right)\rightarrow \|N\|=\sqrt{1+\frac{4y^2-20y+25}{4x^2}}$

$\|N\|=\sqrt{\frac{4x^2+4y^2-10y+25}{4x^2}}=\sqrt{\frac{20y-10y+25}{20y-4y^2}}$

$0\le y\le 5$
$25-5y\le z\le 25$

$$\boxed{A_S=\iint_S ds=\int_0^5\int_{25-5y}^{25}\sqrt{\frac{10y+25}{20y-4y^2}}\,dz\,dy}$$

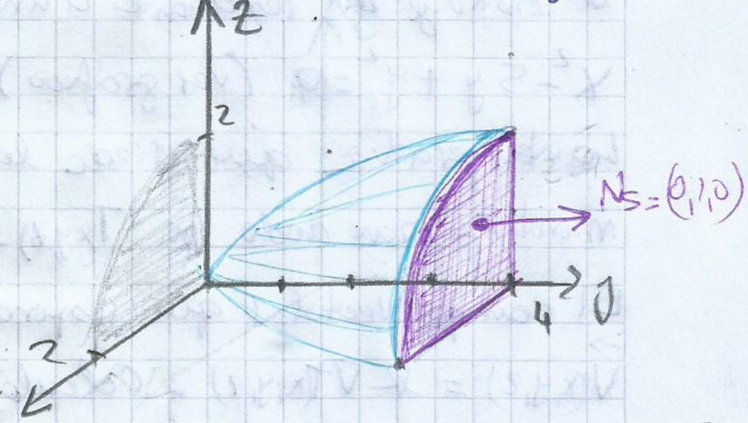
NOTA

(resuelto por Sylvina)

EJ 5 a) Calcular el flujo de la sup. $y=4$ en el 1° octante con normal exterior limitada por el paraboloide $y=x^2+z^2$ sabiendo que el campo $\vec{V}$ es conservativo con función potencial U

$U(x,y,z) = xy + 4c$ ¿es posible aplicar el teorema de la divergencia?

Superficie: $\begin{cases} y=4 \\ 1° \text{ octante} \\ \text{limitada por } y=x^2+z^2 \end{cases}$ superficie ABIERTA



campo conserv.

$\vec{V} = \bar{\nabla} U \rightarrow \vec{V}(x,y,z) = (y, x, 0)$

No es práctico usar T. Divergencia porque habría que agregar muchas tapas y calcular el flujo a través de ellas

$$\iint_S \vec{V}\, d\bar{s} = \iint_{S_{xz}} \vec{V} \cdot N\, dxdz = \iint_{S_{xz}} (y, x, 0)(0,1,0)\, dxdz = \iint_{S_{xz}} x\, dxdz =$$

$$\overset{c.v.}{=} \int_0^{\pi/2}\int_0^2 r\, \underbrace{r\cos(t)}_{x}\, dr\, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{8}{3}\cos(t)\, dt = \frac{8}{3}$$

$$\boxed{\iint_S \vec{V}\, d\bar{s} = \frac{8}{3}}$$

b) Enunciar el teorema de la divergencia

hip. $\begin{cases} W \text{ es una región de } \mathbb{R}^3 \\ S \text{ sup frontera de } W\text{, orientada al exterior} \\ \bar{f} = (P, Q, R) \in C^1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ T. Gauss: $\oiint_S \bar{f}\, d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{f})\, dvol$

$\operatorname{div}(\bar{f}) = P'_x + Q'_y + R'_z$

NOTA

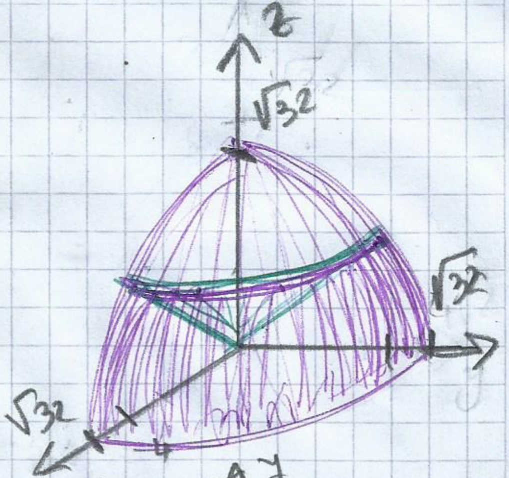
(resuelto por Sylvina)

$\boxed{\text{EJ 6}}$ Calcular la masa del cuerpo definido por $z \leq \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2 \leq 32$, en el 1º octante, si su densidad es proporcional a la distancia del punto del cuerpo al plano xy

1º octante $\Rightarrow z^2 \leq 32-(x^2+y^2)$

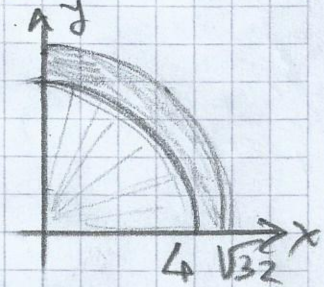
$z \leq \sqrt{32-(x^2+y^2)}$

$z \leq \sqrt{x^2+y^2}$



Analizo la proyección

$$\begin{cases} z^2 = 32-(x^2+y^2) \\ z^2 = x^2+y^2 \end{cases} \rightarrow 16 = x^2+y^2$$



$0 \leq r \leq 4$

$0 \leq z \leq r$

$0 \leq t \leq \pi/2$

$4 \leq r \leq \sqrt{32}$

$0 \leq z \leq \sqrt{32-r^2}$

$0 \leq t \leq \pi/2$

$\delta(x,y,z) = k|z|$

$z \geq 0$

$\delta(x,y,z) = kz$

$$\text{Masa}_W = \iiint_W \delta(r,\theta,z)\, d\text{vol} = k\iiint_W z\, dx\,dy\,dz =$$

$$\overset{c.c.}{=} k\int_0^{\pi/2}\int_0^4\int_0^r r z\, dz\, dr\, dt + k\int_0^{\pi/2}\int_4^{4\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{32-r^2}} r z\, dz\, dr\, dt =$$

$$= k\int_0^{\pi/2} dt \int_0^4 r\frac{z^2}{2}\Big|_0^r dr + k\int_0^{\pi/2}\int_4^{4\sqrt{2}} r\frac{z^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{32-r^2}} dr =$$

$$= k\frac{\pi}{2}\underbrace{\int_0^4 \frac{r^3}{2} dr}_{16\pi} + k\frac{\pi}{2}\int_4^{4\sqrt{2}} r(32-r^2)\, dr = k\,16\pi + 32\pi k = 48\pi k.$$

$$\boxed{\text{Masa} = 48\pi k}$$

NOTA

(resuelto por Sylvina)